

영국산업혁명 후기의 삶의 질에 대한 추론 우선 [바]에서 제시한 그래프는 1800~1855년 사이 실질임금은 증가하였고, 성인 남성의 평균 신장은 줄어들었음을 확인할 수 있다. 실질임금 추이는 영국 산업혁명기 물질적인 삶의 질은 평균적으로 증가하였음을 시사한다. 그러나 성인 남성의 평균 신장 추이로 평가할 때 영국 산업혁명의 삶의 질은 하락하였음을 추론할 수 있다. 제시문 [라]는 신장이 어린 시절의 영양결핍, 아동노동 그리고 질병환경에의 노출 정도를 보여준다고 하였다. 또한 우리는 제시문 [마]의 작품을 통해 영국산업혁명 당시 아이들이 육체적 노동과 배고픔에 시달리고 있었음을 알 수 있다. 따라서 [라]와 [마]의 내용을 종합하면 산업혁명 후기 왜 성인 남성의 평균 신장이 하락하는지를 이해할 수 있다. 결국 성인 평균 신장으로 평가할 때 영국 산업혁명 동안 개인들의 평균적인 삶의 질은 하락하고 있었음을 추론할 수 있다. 유의할 점은 두 지표(실질임금과 평균 신장) 중 어느 한 쪽만을 선택하는 것 보다는 각 지표가 보여주는 점을 명확히 밝히고 두 지표의 차이점을 논의하는 것이 요구된다.

자연계열

1. 모의 논술문제

[문항1]

제시문을 읽고 다음 물음에 답하라. (글자 수 제한 없음, 50% 배점)

[가]

첫째 항 a_1 과 둘째 항 a_2 가 주어지고 $p+q+r=0$ 인 실수 p, q, r 과 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$$p a_{n+2} + q a_{n+1} + r a_n = 0$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 있을 때 $q = -p - r$ 을 주어진 식에 대입하고 정리하면

$$p(a_{n+2} - a_{n+1}) = r(a_{n+1} - a_n)$$

즉, 등식

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{r}{p}(a_{n+1} - a_n)$$

을 만족하므로 $\{a_n\}$ 의 계차수열은 공비가 $\frac{r}{p}$ 인 등비수열이다. 이때 $a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 놓으면,

$$b_{n+1} = \frac{r}{p} b_n, \quad b_1 = a_2 - a_1$$

이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n = (a_2 - a_1) \left(\frac{r}{p} \right)^{n-1}$$

이다. 그러므로 $n \geq 1$ 에 대하여

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_2 - a_1) \left(\frac{r}{p} \right)^{k-1} = a_1 + \frac{(a_2 - a_1)(1 - (r/p)^{n-1})}{1 - (r/p)}$$

이다.

[나]

수열 $\{a_n\}$ 이 $p+q+r \neq 0$ 인 실수 p, q, r 과 모든 자연수 n 에 대하여

$$p a_{n+2} + q a_{n+1} + r a_n = 0$$

을 만족하는 경우

$$(a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n)$$

을 성립하게 하는 실수 α, β 를 찾는다.

먼저 $\alpha = \beta$ 인 경우를 살펴보자. 예를 들어, 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} - 4 a_{n+1} + 4 a_n = 0$$

을 만족할 때, 식

$$(a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n)$$

으로부터 $\alpha + \beta = 4$, $\alpha \beta = 4$ 를 얻고 이를 풀면 $\alpha = \beta = 2$ 를 얻는다. 이 경우 수열 $\{a_n\}$ 은

$$(a_{n+2} - 2 a_{n+1}) = 2 (a_{n+1} - 2 a_n)$$

을 만족한다.

이때 $a_{n+1} - 2 a_n = b_n$ 이라 놓으면, $b_{n+1} = 2 b_n$, $b_1 = a_2 - 2 a_1$ 이므로 $b_n = (a_2 - 2 a_1) 2^{n-1}$ 이고,

이로부터 수열의 일반항 a_n 을 구할 수 있다. ①

α, β 가 서로 다른 실수 ($\alpha \neq \beta$) 인 경우에는 두 식

$$(a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n)$$

과

$$(a_{n+2} - \beta a_{n+1}) = \alpha (a_{n+1} - \beta a_n)$$

이 모든 자연수 n 에 대하여 성립하고, 이는 두 수열 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ 과 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ 이 각각 공비가 β 와 α 인 등비수열이라는 것을 의미한다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-1}$$

$$a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1) \alpha^{n-1}$$

이 성립하고, 이 두 개의 식 중 위의 식에서 아래의 식을 빼고 정리하면 수열의 일반항 a_n 을 구할 수 있다.

[다]

두 개의 용기 A, B 에 현재 적당한 양의 물이 들어있는데, 용기 A 에 담긴 물의 양의 10%를 용기 B 로 옮겨 담은 동시에 용기 B 에 담긴 물의 양의 20%를 용기 A 로 옮겨 담은 작업을 매 1분마다 지속적으로 반복한다. 즉 현재부터 매 1분마다 용기 A 에는 담겨 있던 물의 10%가 빠져나가는 동시에 용기 B 에 담겨져 있던 물의 20%가 들어오는 것이 반복 된다. 이때 아주 오랜 시간이 지난 후 두 용기에 담긴 물의 양의 비율은 일정한 값으로 수렴한다.

【1-1】 $p+q+r \neq 0$ 인 실수 p, q, r 과 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $p a_{n+2} + q a_{n+1} + r a_n = 0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴할 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 임을 설명하시오. 또한 $p+q+r=0$ 인 경우에도 $p a_{n+2} + q a_{n+1} + r a_n = 0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴할 때 항상 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이 성립하는가?

【1-2】 제시문 [나]의 밑줄 친 ①에서 언급한 수열에서 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ 일 때 일반항 a_n 을 구하시오. 또한, 제시문 [나]를 참조하여 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ 그리고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} - 4 a_{n+1} + 3 a_n = 0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하라.

【1-3】 제시문 [다]에서 아주 오랜 시간이 지난 후 후에 용기 A 에 담긴 물의 양은 용기 B 에 담긴 물의 양의 2배의 값으로 수렴함을 설명하라.

[문항2]

제시문을 읽고 다음 질문에 답하라. (글자 수 제한 없음, 50% 배점)

한국대학교는 교수 100명의 직접투표를 통해 총장 선거를 실시했다. 총장후보자는 A, B, C, D 네 사람이고, 유권자인 교수 100명은 투표용지에 각 후보자의 순위를 적는 방식으로 선거가 진행되었으며, 투표 결과는 다음의 표와 같다.

득표수 (명)	1위	2위	3위	4위
35	A	B	C	D
1	A	B	D	C
0	A	C	B	D
1	A	C	D	B
0	A	D	B	C
1	A	D	C	B
0	B	A	C	D
0	B	A	D	C
0	B	C	A	D
1	B	C	D	A
0	B	D	A	C
10	B	D	C	A
0	C	A	B	D
0	C	A	D	B
2	C	B	A	D
25	C	B	D	A
0	C	D	A	B
3	C	D	B	A
0	D	A	B	C
0	D	A	C	B
0	D	B	A	C
1	D	B	C	A
0	D	C	A	B
20	D	C	B	A

투표결과 4명의 후보들은 각자가 총장이 되어야 한다고 주장하였고, 학교의 이사회는 토론 끝에 후보 D를 탈락시킨 후 교수 20명으로 총장 후보 추천 위원회를 새롭게 구성하여 이들로 하여금 후보 A, B, C를 각자 선호하는 순서대로 적는 2차 투표를 실시하였다. 위원회는 2차 투표 결과 단순히 1순위를 가장 많이 얻은 후보가 총장으로 당선된다고 물을 정했고, 개표결과 20명의 위원들 중 11명이 A보다 B를 선호하였고, 14명이 B보다 C를 선호하였으며, 12명이 C보다 A를 선호하였고, 또한 아래 표에서 개표결과 발생 가능한 6가지 결과의 득표수를 나타내는 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ 중 단 하나도 0이 아니었다고 공표하였다.

득표수 (명)	1위	2위	3위
f_1	A	B	C
f_2	A	C	B
f_3	B	A	C
f_4	B	C	A
f_5	C	A	B
f_6	C	B	A

【2-1】1차 투표결과 세 명의 후보 A, B, C 모두 각자 자신이 총장이 되어야 한다고 주장하였을 때 그 이유가 나름대로 의미 있다고 받아들여진 이유를 설명하시오. (15% 배점)

【2-2】1차 투표에서 탈락한 후보 D가 총장이 되어야 한다고 주장할 수 있는 근거를 나름의 논리로 설명하시오. (10% 배점)

【2-3】2차 투표 후 위원회가 공표한 내용만으로 총장 당선자가 결정되었다고 말할 수 있는가? 만일 그렇다면 총장 당선자는 누구인가? (25% 배점)

2. 해설

[문항1]

교과과정 : 고등학교 수학 1 (수열, 제차수열, 점화식, 수열의 극한)

문항 1은 수리 계산형, 수리 응용형 문제로 고등학교 교과과정에서 다루는 수열 및 극한을 주제로 하고 있다. 제시문의 내용을 이해하여, 이에 관한 질문을 수리적 계산으로 옮기고 답을 올바르게 구하는 능력을 평가하기 위한 논술 문제로 본교 대입 논술시험에서 실제 출제되는 유형과 매우 유사하다.

【1-1】

$p+q+r \neq 0$ 에 대하여 $p a_{n+2} + q a_{n+1} + r a_n = 0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴한다고 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 라 놓고 등식 $p a_{n+2} + q a_{n+1} + r a_n = 0$ 에 $n \rightarrow \infty$ 의 극한을 취하면 $(p+q+r)\alpha = 0$ 을 얻는다. 이때 $p+q+r \neq 0$ 이므로 $\alpha = 0$ 이어야 한다. 한편 $p+q+r = 0$ 인 경우에는 $(p+q+r)\alpha = 0$ 은 모든 실수 α 에 대하여 성립하므로 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이 반드시 성립할 필요가 없다. 실제로 제시문 [가]에서 수열의 일반항

$$a_n = a_1 + \frac{(a_2 - a_1)(1 - (r/p)^{n-1})}{1 - (r/p)} \text{은 } -1 < \frac{r}{p} < 1 \text{인 경우에 } a_1 + \frac{a_2 - a_1}{1 - (r/p)} \text{으로 수렴한다.}$$

【1-2】

$a_1 = 1, a_2 = 4$ 그리고 $(a_{n+2} - 2a_{n+1}) = 2(a_{n+1} - 2a_n)$ 에서 $a_{n+1} - 2a_n = b_n$ 이라 놓으면, $b_{n+1} = 2b_n, b_1 = a_2 - 2a_1 = 2$ 이므로

$b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ 이고 따라서 $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$ 이 성립한다. 이 식의 양변을 2^{n+1} 로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}$ 가 성립하므로

수열 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 은 첫째 항이 $\frac{1}{2}$ 이고 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이다. 따라서 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ 가 성립하여 $a_n = n2^{n-1}$ 을 얻는다.

한편, $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ 인 경우 $(a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ 라 놓고 비교하면 $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 3$ 으로부터 $(\alpha, \beta) = (1, 3)$ 또는 $(3, 1)$ 을 얻으므로, 제시문 [나]로부터

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (4-1)3^{n-1} = 3^n \\ a_{n+1} - 3a_n &= (4-3)1^{n-1} = 1 \end{aligned}$$

이 성립한다. 위 식에서 아래 식을 빼고 정리하면 $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ 을 얻는다.

【1-3】

$a_k = k$ 분 후에 용기 A에 들어있게 되는 리터 단위의 물의 양
 $b_k = k$ 분 후에 용기 B에 들어있게 되는 리터 단위의 물의 양
 이라 놓으면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 0.9a_k + 0.2b_k \\ b_{k+1} &= 0.1a_k + 0.8b_k \end{aligned}$$

위의 식에서 $b_k = 5a_{k+1} - 4.5a_k$ 을 얻고 이를 아래 식에 대입하면 다음을 얻는다.

$$5a_{k+2} - 4.5a_{k+1} = 0.1a_k + 0.8(5a_{k+1} - 4.5a_k)$$

이를 정리하면 $5a_{k+2} - 8.5a_{k+1} + 3.5a_k = 0$ 이 성립하고 $(p+q+r=0$ 인 경우) 따라서

$$a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{7}{10}(a_{k+1} - a_k) \text{가 성립하고, } -1 < \frac{7}{10} < 1 \text{이므로 } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \text{가 존재한다.}$$

모든 자연수 k 에 대하여 $a_k + b_k$ 는 일정한 값이므로 $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$ 도 존재한다.
 이제 방정식

$$\begin{aligned} a &= 0.9a + 0.2b \\ b &= 0.1a + 0.8b \end{aligned}$$

를 풀면 $a = 2b$ 를 얻고 따라서 A에 담긴 물의 양과 용기 B에 담긴 물의 양의 비율은 특정한 값 2에 수렴한다.

【문항2】

교과과정 : 중학교 1학년 통계 (도수분포),
고등학교 1학년 방정식과 부등식 (방정식의 정수해)

문항 2는 자료 분석형 문제로 자료가 되는 도표에 대한 철저한 이해를 동반한 논리적 사고 및 수리적 능력을 기반으로 하는 문제 해결 능력을 평가하고자 출제되었다.

【2-1】과 【2-2】은 자료분석-과제해결형 문제로서 수험생이 논리적이고 수학적인 사고를 이용하여 현실의 문제를 분석하고 해결해나갈 수 있는 능력을 평가하는 문제이다.

【2-3】은 미지수의 범위가 주어진 1차 연립 방정식의 정수해를 구하는 문제로 귀결되는 과제 해결형 및 수리 응용형의 혼합 형식이다.

【2-1】

1순위를 가장 많이 얻은 후보가 당선되기로 할 때, 38표로 1순위를 가장 많이 얻은 후보 A가 총장에 당선되어야 한다. 이는 국회의원 선거에서 당선자가 나오는 방식과 금메달의 숫자로만 올림픽 출전국가의 순위를 매기는 방식과 같다.

1순위에게 4점, 2순위에게 3점, 3순위에게 2점, 4순위에게 1점을 주어 그 점수를 합하는 방법을 택할 때, 총점 284로 B가 가장 높은 점수를 얻어 281점으로 2위를 차지한 후보 C를 누르고 총장에 당선된다. 이는 A는 4점, B는 3점, C는 2점, D는 1점으로 간주하여 성적을 산출하는 대학교 학점 평가 방식과 같다.

후보끼리 일대일로 선호도를 비교할 때, C:A = 62:38, C:B = 52:48, C:D = 67:33 로 후보 C가 당선된다. 이는 출전 팀들이 일대일로 풀리그를 벌여서 우승자를 결정짓는 운동경기에 비교할 수 있다.

【2-2】

1위 최소득표 후보를 차례로 탈락시키고 마지막으로 남은 후보가 당선되는 방식을 고려해보자. 투표 시 처음부터 지지하는 후보를 1순위, 1순위 후보가 탈락할 때 지지하는 후보를 2순위, 2순위 후보가 탈락할 때 지지하는 후보를 3순위 등으로 기표하면 단 한번 투표로 최종 당선자를 선출할 수 있다. 이런 방식을 택하는 경우 1순위 지지자가 11명뿐인 후보 B가 가장 먼저 탈락하고, B가 없는 상황에서 투표결과를 상정하면 후보 C가 이어서 탈락하고 최종 선발은 남은 후보 A와 D 중 다수의 표를 얻은 후보 D가 당선된다.

【2-3】

주어진 식 $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 20$, $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \geq 1$ 와
 $f_3 + f_4 + f_6 = 11$, $f_2 + f_5 + f_6 = 14$, $f_1 + f_2 + f_3 = 12$ 로부터
 $f_1 + f_2 + f_5 = 9$, $f_1 + f_3 + f_4 = 6$, $f_4 + f_5 + f_6 = 8$ 을 얻는다.

이중 가장 간단한 식 $f_1 + f_3 + f_4 = 6$ 으로부터 $2 \leq f_3 + f_4 \leq 5$ 가 성립하므로
 $f_3 + f_4 = 2, 3, 4, 5$ 를 각각 대입해서 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ 를 구하도록 한다.

- (i) $f_3 + f_4 = 2$ 인 경우 $f_1 = 4, f_3 = 1, f_4 = 1$ 이고 $f_1 + f_2 + f_3 = 12$ 로부터 $f_2 = 7$ 을 얻으나 이는 식 $f_1 + f_2 + f_5 = 9$ 를 만족할 수 없다.
- (ii) $f_3 + f_4 = 3$ 인 경우 $f_1 = 3, f_3 = 1, f_4 = 2$ 또는 $f_1 = 3, f_3 = 2, f_4 = 1$ 가 성립하나 이는 $f_1 + f_2 + f_3 = 12$ 와 $f_1 + f_2 + f_5 = 9$ 를 동시에 만족할 수 없다.
- (iii) $f_3 + f_4 = 4$ 인 경우 $f_3 + f_4 + f_6 = 11$ 으로부터 $f_6 = 7$ 을 얻으나 이는 $f_4 + f_5 + f_6 = 8$ 를 만족할 수 없다.
- (iv) $f_3 + f_4 = 5$ 인 경우 $f_1 = 1$ 이고 $f_3 + f_4 + f_6 = 11$ 으로부터 $f_6 = 6$ 을 얻고 $f_4 + f_5 + f_6 = 8$ 로부터 $f_4 = 1, f_5 = 1$ 을 얻고 따라서 $f_3 = 4$ 이고 $f_1 + f_2 + f_3 = 12$ 로부터 $f_2 = 7$ 을 얻는다. 이렇게 얻어진 $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) = (1, 7, 4, 1, 1, 6)$ 은 모든 식을 만족한다.

따라서 위원회가 공표한 내용만으로 총장 당선자가 유일하게 결정되며, 당선자는 8명에게서 1위 득표를 얻은 후보 A이다.